Hinweise zu den Operatoren und der Nutzung des GTR (TI-nspire CX ohne CAS) der Fachschaft Mathematik (ab Abi 23)

Die Nutzung des GTR im zweiten Prüfungsteil verkürzt den Rechenaufwand enorm. Der Dokumentation im GTR-Teil kommt durch die hohen Nutzungsmöglichkeiten des GTR also eine große Bedeutung zu.

Grundsätzlich gilt:
Lösungswege müssen dokumentiert werden. Die Angabe von GTR-Befehlen wie Menu, 1, 3, 5 ist KEINE Dokumentation. Sie muss auch nicht ergänzend angeben werden, dies ist nicht von den Prüflingen zu erwarten, kann aber gemacht werden. Die nachfolgend angeführten Dokumentationen sind vollauf korrekt, ausreichend und erfordern die Vergabe der maximalen Punktzahl.

Es gilt stets: Eine rechnerische Lösung (Operatoren „Berechnen" bzw. „rechnerisch Bestimmen") ist auch eine vollwertige Lösung bei den Operatoren „Ermitteln" bzw. „Bestimmen". Andersherum gilt dies nicht!

Die Operatoren „berechnen" bzw. „rechnerisch bestimmen" erfordern immer den rechnerischen Ansatz. Argumentationen über die Anschauungen sind an keiner Stelle gestattet (so muss z.B. auch bei gesuchten y-Werten der rechnerische Ansatz $f(\dots) = \dots$ notiert sein und es kann nicht einfach der Punkt angegeben werden) – damit darf (theoretisch) das Graphik-Menü hier nicht verwendet werden.

Die Operatoren „bestimmen" bzw. „ermitteln" erfordern eine nachvollziehbare Dokumentation aller Lösungsschritte. Wenn das Graphikmenü genutzt wurde (zulässig und gewünscht), so muss dies z.B. über die Formulierung „GTR (graphische Analyse)" dokumentiert werden.

Rundungen und exakte Lösungen:
Bei den Operatoren „rechnerisch bestimmen", „berechnen", ... werden in der Regel keine exakten Werte erwartet, wenn dies nicht anders aus der Aufgabenstellung hervorgeht. Bei den Operatoren „nachweisen" oder „zeigen" werden exakte Werte erwartet, wenn dies aus dem geforderten Nachweis hervorgeht.

Antworten zu Aufgaben:
Ergebnisse im Sachzusammenhang müssen mit Einheiten versehen werden (siehe Bsp. 4). Wann und ob ein Antwortsatz verfasst werden muss, wird mit der Lehrkraft abgestimmt.

Grundsätzlich gilt:
Die im Unterricht etablierten Konventionen gelten: Die Lehrkraft entscheidet.

Bemerkungen, Fragen, Ergänzungen oder Verbesserungen können gerne an fiebig@gbg.koeln gerichtet werden.

Mathematik

Übersicht über die Operatoren (gültig ab dem Abitur 2023)

Operator	**Erläuterung**
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
untersuchen	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

Die Verwendung eines Operators, der in der Übersicht nicht genannt wird, ist möglich, wenn aufgrund der standardsprachlichen Bedeutung dieses Operators in Verbindung mit der Aufgabenstellung davon auszugehen ist, dass die jeweilige Aufgabe im Sinne der Aufgabenstellung bearbeitet werden kann.

Grundsätzlich können sich alle Operatoren auf alle drei Anforderungsbereiche beziehen.

Die Operatoren können durch Zusätze (z. B. „rechnerisch“ oder „grafisch“) konkretisiert werden. Zugelassene Hilfsmittel dürfen zur Bearbeitung verwendet werden, sofern dem kein entsprechender Zusatz entgegensteht. Speziell kann bei der Verfügbarkeit von digitalen Mathematikwerkzeugen im Einzelfall die Darstellung eines Lösungswegs gefordert werden, der auch ohne den Einsatz dieser Technologien nachvollziehbar ist.

Weitere Hinweise zur Dokumentation von Lösungen finden sich auf Standardsicherung NRW unter Zentralabitur Mathematik im Abschnitt „Fachliche Vorgaben, Hinweise und Materialien – Mathematik“.

Beispiel 1 - Analysis

$$f(x) = -3x^5 + 5x^3 + 2$$

a) Geben Sie die Nullstellen an.

Lösung:

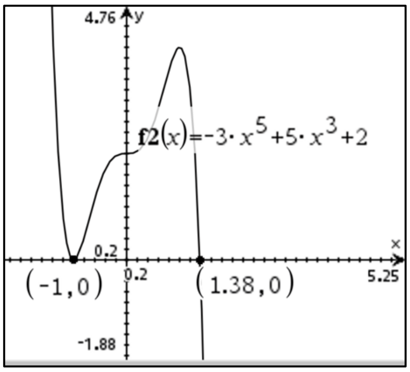
$$x_1 = 1{,}38 \text{ und } x_2 = -1$$

b) Ermitteln/Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

Lösung (2 Möglichkeiten):

i) Grafisch (sinnvoll):

GTR (Graphische Analyse, Nullstellen)
$x_1 = 1{,}38$ und $x_2 = -1$



ii) Rechnerisch (siehe c):

$f(x) = 0$
GTR (polyroots):
$x_1 \approx 1{,}38$ und $x_2 = -1$

c) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

Lösung:

$f(x) = 0$
GTR (polyroots):
$x_1 \approx 1{,}38$ und $x_2 = -1$

polyRoots$(-3\cdot x^5+5\cdot x^3+2,x)$
$\{-1,-1,1.38481\}$

Bemerkung: *Es ist auf den Unterschied zwischen ≈ und = zu achten.*

Beispiel 2 – Analysis

$$f(x) = -3x^5 + 5x^3 + 2$$

a) Geben Sie die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion an.

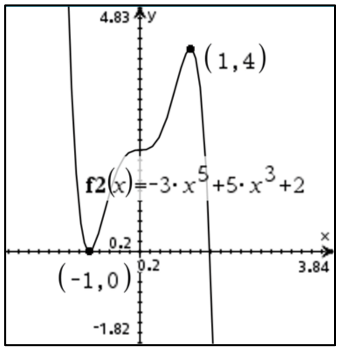
Lösung: $HP(1/4)$ und $TP(-1/0)$

b) Ermitteln/Bestimmen Sie die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion.

Lösung (2 Möglichkeiten):

i) Graphisch (sinnvoll)
GTR (Graphische Analyse, Maximum, Minimum)
$HP(1/4)$ und $TP(-1/0)$

ii) Rechnerisch (theoretisch möglich, nicht sinnvoll)
Siehe c)



c) Berechnen Sie die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion.

Lösung:

N.B.: $f'(x) = 0$
$f'(x) = -15x^4 + 15x^2$
GTR (polyroots): $x_1 = -1$ und $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$

polyRoots$(-15\cdot x^4+15\cdot x^2,x)$ $\{-1,0,0,1\}$

oder (ohne gebildete Ableitung):
GTR (polyroots mit $\frac{d}{dx}$): $x_1 = -1$ und $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$

polyRoots$\left(\frac{d}{dx}(-3\cdot x^5+5\cdot x^3+2),x\right)$
$\{-1,0,0,1\}$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ oder VZW-Krit.

$f''(x) = -60x^3 + 30x$

$f''(x_1) = 30 > 0$
$f(x_1) = 0 \Rightarrow TP(-1/0)$

$f''(x_2) = 0 \Rightarrow$VZW-Krit:

x	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	$Sattelpunkt$	↗

$f''(x_3) = -30 < 0$
$f(x_3) = 4 \Rightarrow HP(1/4)$

$\frac{d^2}{dx^2}(-3\cdot x^5+5\cdot x^3+2)|x=-1$ 30

Bemerkung: *Das Berechnen der Werte der zweiten Ableitung in der hinreichenden Bedingung ist auch mit $\frac{d^2}{dx^2}$ möglich. Somit muss bei dieser Aufgabe, wenn dieser Weg gewählt wird, keine Ableitungsfunktion mehr berechnet werden! Dies gilt nur für ganzrationale Funktionen und den Befehl polyroots, da mit dem GTR nicht bewiesen werden kann, dass nsolve alle Nullstellen der Ableitung gefunden hat.*

Beispiel 3 – Analysis (aus der Implementationsveranstaltung)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{10}x(3-x)e^x$$

Für die Ableitung von $f(x)$ gilt:

$$f'(x) = -\frac{1}{10}(x^2-x-3)e^x$$

Geben Sie die Nullstellen der Funktion **an** und **berechnen** Sie die Koordinaten **des** Hochpunktes.

Bemerkung:

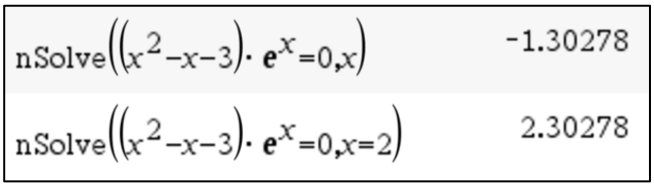
Durch das Wort ***„des"*** *oder die Abbildung ist klar, dass der Hochpunkt existiert. Der Nachweis der Existenz des Hochpunktes durch die hinreichende Bedingung muss hier <u>nicht</u> erbracht werden!!!*

<u>Lösung</u>:

- Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$
- Hochpunkt:
  N.B. $f'(x) = 0$
  $\Leftrightarrow -\frac{1}{10}(x^2-x-3)e^x = 0 \qquad (1)$
  GTR (nsolve): $x \approx 2{,}30$
  $y = f(2{,}3) \approx 1{,}6$

Bemerkung:

Hier muss man sich mit dem Befehl nsolve auskennen, sonst erhält man die Stelle des Tiefpunkts.



Bemerkung:

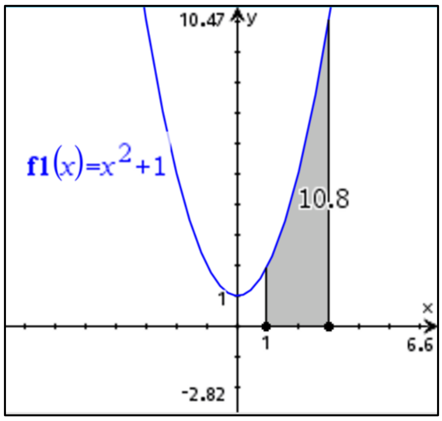
Eine Berechnung von (1) ohne den GTR über den Satz des Nullprodukts und beispielsweise die p-q-Formel usw. ist möglich, aber aufwendiger und kostet Zeit!

Beispiel 4 – Analysis

a)	Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ im Intervall $[1,3]$.

Lösung:

Aus der graphischen Analyse folgt, dass die Funktion keine Nullstellen im Intervall $[1,3]$ besitzt und die Funktion in diesem Intervall nur positive Funktionswerte besitzt.



Somit gilt (entweder über das Grafikfenster oder eine Berechnung mit Hilfe des numerischen Integrals):

$$A = \int_1^3 (x^2 + 1)\, dx = 10{,}8 FE$$

b)	Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ im Intervall $[1,3]$.

Lösung:

Nullstellen im Intervall $[1,3]$:
Ansatz: $x^2 + 1 = 0$
GTR (polyroots): keine Lösungen

Nun gibt es 2 Möglichkeiten:

a) Funktionswerte im Intervall:
$f(1) = 2 > 0$
$\Rightarrow$ für alle x aus dem Intervall $[1,3]$ gilt: $f(x) > 0$

$$\Rightarrow A = \int_1^3 (x^2 + 1)\, dx \approx 10{,}67 FE$$

b) Mit dem Betrag:

$$A = \left| \int_1^3 (x^2 + 1)\, dx \right| \approx 10{,}67 FE$$

Bemerkung:

Eine Berechnung mit Hilfe einer Stammfunktion und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist in Kombination mit dem Operator „berechnen“ hier nicht mehr nötig!
Hierfür müsste die Aufgabe z.B. lauten:

a) Geben Sie eine Stammfunktion $F(x)$ zur Funktion $f(x)$ an.
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ im Intervall $[1,3]$ mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.